

El Algoritmo de Euclides Genera Ritmos Musicales Tradicionales

Godfried Toussaint*
School of Computer Science, McGill University
Montreal, Québec, Canada
godfried@es.mcgill.ca
traducción: @bird
abrid_music@ono.com

Extracto

El Algoritmo de Euclides (llega hasta nosotros a través de su obra “Elementos”) calcula el Máximo Común Divisor de dos enteros dados. Aquí se muestra como la estructura del Algoritmo Euclidiano puede ser utilizada para generar, muy eficientemente, una larga familia de ritmos usados como “Líneas de Tiempo” (obstinatos), en la música Subsahariana en particular y en la “World Music” o música étnica en general. Estos ritmos, denominados aquí euclidianos, tienen la propiedad de que sus patrones de aparición son distribuidos de la forma más uniformemente posible. Los ritmos euclidianos también encuentran aplicación en los aceleradores de partículas de la física nuclear y las ciencias de la computación, y están íntimamente relacionados con varias familias de palabras y secuencias de interés en el estudio de la combinatoria de las palabras, al igual que las Cadenas Euclidianas, a las que los ritmos euclidianos son comparados.

1. Introducción

¿Qué tienen en común los Ritmos Africanos, la Fuente de Neutrones por Espalación (SNS) en la física nuclear, la Teoría de las Cadenas en programación y un antiguo algoritmo descubierto por Euclides? La respuesta más corta es: *patrones distribuidos lo más uniformemente posible*. Para la respuesta larga, sigue leyendo.

Matemática y Música han estado entrelazadas desde los días de Pitágoras. Sin embargo, esta interacción ha sido en el campo de la afinación y las escalas. Para algunas instantáneas históricas de esta interacción se remite al lector a la lectura de H.S.M. Coexeter (Music and Mathematics. The Canadian Music Journal, VI:13-24, 1962). El Ritmo, por otro lado, ha sido históricamente ignorado. Aquí haremos algunas conexiones matemáticas entre el ritmo musical y otras áreas de conocimiento como la física nuclear y la programación, así como con el trabajo de un antiguo matemático griego, Euclides de Alejandría.

2. Sistemas de Cronometraje en los Aceleradores de Neutrones

El siguiente problema es considerado por Bjorklund [5], [4] en conexión con el funcionamiento de ciertos componentes (como las fuentes de alimentación de alto voltaje) de los aceleradores de la fuente de neutrones por espalación (SNS) usados en física nuclear. El tiempo se divide en intervalos (en el caso de SNS, diez segundos). Durante algunos de estos intervalos, una puerta es habilitada por un sistema de cronometraje que genera pulsos para realizar esta tarea. El problema para un número dado n de intervalos de tiempo y otro número $k < n$ de pulsos, es distribuir los pulsos de la manera más uniforme posible entre estos intervalos. Bjorklund [5] representa este problema como una secuencia binaria de unos (k) y ceros ($n-k$), donde cada entero representa un intervalo de tiempo y los unos los pulsos. El problema queda reducido a lo siguiente: construir una secuencia binaria de n bits con unos (k) distribuidos de la manera más uniforme posible entre los ceros ($n-k$). Si k se divide uniformemente sin resto entre n , la solución es obvia. Por ejemplo, si $n = 16$ y $k = 4$, la solución es [1000100010001000]. El problema principal es cuando k y n son relativamente números primos, es decir cuando éstos son sólo divisibles entre uno.

El algoritmo de Bjorklund será descrito de una forma sencilla con uno de sus ejemplos. Consideremos una secuencia $n = 13$ y $k = 5$. Ya que $13 - 5 = 8$, empezamos considerando una secuencia de cinco unos seguida de ocho ceros, que debe ser pensada como trece secuencias de un bit cada una:

[1111100000000]

Empezamos emplazando los ceros después de cada uno para producir cinco secuencias de dos bits cada una y tres ceros de resto:

[10] [10] [10] [10] [10] [0] [0] [0]

Seguidamente distribuimos los tres ceros restantes de similar manera, obteniendo:

[100] [100] [100] [10] [10]

Ahora tenemos tres secuencias de tres bits y un resto de dos secuencias de dos bits cada una. Continuando de la misma manera, emplazando las secuencias de [10] detrás de cada [100] para obtener:

[10010] [10010] [100]

El proceso termina cuando el resto consiste en una sola secuencia (en este caso la secuencia [100]), o cuando se queda sin ceros. La secuencia final es pues una concatenación de [10010], [10010] y [100]:

[1001010010100]

Nótese que podrá darse un paso más allá, insertando [100] entre [10010] [10010]. Sin embargo Bjorklund argumenta que, siendo la secuencia cíclica, no importaría.

Finalmente nos muestra que la secuencia final puede ser programada desde la secuencia inicial utilizando $O(n)$ operaciones aritméticas en el peor de los casos.

3. El Algoritmo Euclidiano

Uno de los algoritmos más antiguos conocido, descrito en Los Elementos (alrededor del año 300 a.c.) en la Proposición 2 del Libro VII, referido hoy en día como el “Algoritmo Euclidiano” calcula el Máximo Común Divisor de dos números dados [12], [14]. La idea es muy simple. El número más pequeño es repetidamente restado del mayor hasta que el mayor es cero o se vuelve más pequeño que el pequeño, en cuyo caso se le llama resto. Este resto es entonces repetidamente restado del número más pequeño hasta obtener un nuevo resto. Este proceso continua hasta que el resto es cero. Para ser más preciso, consideremos un ejemplo con los números 5 y 8 como antes. Primero, 8 se divide entre 5 obteniendo un resto de 3. Después 5 entre 3, obteniendo resto de 2, 3 entre 2, obteniendo resto 1 y finalmente 2 entre 2 obteniendo resto 0. Los pasos de este proceso pueden ser resumidos por esta secuencia de ecuaciones:

$$\begin{aligned}8 &= (1) (5) + 3 \\5 &= (1) (3) + 2 \\3 &= (1) (2) + 1 \\2 &= (1) (2) + 0\end{aligned}$$

Sean pues m y k los números enteros, siendo $m > k$.

EUCLID(m , k)

1. **if** $k = 0$
2. **then return** m
3. **else return** EUCLID(k , $m \bmod k$)

Ejecutando este algoritmo con $m = 8$ y $k = 5$, obtenemos:

$$\text{EUCLID}(8, 5) = \text{EUCLID}(5, 3) = \text{EUCLID}(3, 2) = \text{EUCLID}(2, 1) = \text{EUCLID}(1, 0) = 1$$

Queda claro en la descripción del Algoritmo Euclidiano que si m y k son iguales al número de ceros y unos, respectivamente, en una secuencia binaria (con $n = m + k$) entonces su estructura coincide con la estructura del Algoritmo de Bjorklund, descrito anteriormente. De hecho, el Algoritmo de Bjorklund utiliza los sucesivos restos de la división, de la misma forma como lo hizo Euclides en sus Elementos [12]. También es bien sabido que si el algoritmo EUCLID(m , k) se aplica a dos $O(n)$ números bit (secuencia binaria de longitud n) se llevarán a cabo $O(n)$ operaciones aritméticas en el peor de los casos [8].

4. Ritmos Euclidianos en la “World Music” tradicional

Un método común para representar ritmos musicales es como secuencias binarias, donde cada bit es considerado como una unidad de tiempo (por ejemplo, una semicorchea), los bit 0 representan silencios (o bien una nota no acentuada) y los bit 1 representan acentos o notas acentuadas [31]. Por lo tanto, las secuencias binarias generadas por el Algoritmo de Bjorklund, tal y como se describió anteriormente, pueden ser consideradas como una familia de ritmos. Además, como el Algoritmo de Bjorklund tiene la misma estructura que el Algoritmo Euclideo, a todos estos ritmos los llamaremos Ritmos Euclideos y los representaremos como $E(k, n)$, donde k indica el número de bits 1 y n es la longitud de la secuencia (ceros más unos). Por ejemplo $E(5, 13) = [1001010010100]$. La notación por medio de 0 y 1, no es la ideal para representar ritmos por ser difícil visualizar la localización de los 1 y la duración de los 0. En la literatura musicológica, es común utilizar el símbolo “x” para los bit 1 y punto “.” para los bit 0. Así el ritmo anterior quedaría representado por $E(5, 13) = [x . . x . x . . x . x . .]$.

El ritmo $E(5, 13)$ es pues un ritmo cíclico con un intervalo de tiempo (¿compás?) de 13 unidades. Este no es un compás habitual en la música étnica. Vamos ahora a considerar, por contrastar, dos valores comunes de k y n ; en particular ¿Cuál es el ritmo $E(3, 8)$? Aplicando el Algoritmo de Euclides a la correspondiente secuencia [11100000], el lector podrá verificar sencillamente que el ritmo resultante sería $E(3, 8) = [x . . x . . x .]$. Este ritmo es ilustrado como un polígono (triángulo) en la figura 1(a), otra manera útil de representar ritmos cíclicos [31], donde se supone que el ritmo empieza en la localización “0”, el tiempo gira en el sentido de las agujas del reloj y los números fuera del triángulo representan silencios. Una representación más compacta sería la tradicional musical donde se añaden los valores de tiempo a la nota dada $E(3,8) = (332)$.

El Ritmo Euclidiano $E(3, 8)$ representado en la figura 1 (a) no es otro que uno de los más famosos en el planeta. En Cuba se le conoce bajo el nombre de “tresillo” y en USA el ritmo de “Habanera”, usado en cientos de canciones rockabilly de los cincuenta. Puede también ser escuchado en los primeros éxitos del rock&roll, en la mano izquierda del pianista o en el saxo, además del contrabajo [7], [15], [22]. Un buen ejemplo es el bajo de la canción de Elvis “Hound Dog”. El ritmo cíclico “tresillo” se puede encontrar con asiduidad en la música tradicional africana occidental. Por ejemplo, es tocado en el Sohu, una danza Ewe de Ghana [16], con la campana atoke (<http://www.youtube.com/watch?v=Wvk9Rib3L9U>). El “tresillo” puede también reconocerse en el primer compás del conocidísimo ritmo de clave de dos compases del Son cubano $[x . . x . . x . . . x . x . . .]$. Puedes ver un vídeo en la página de youtube: (<http://www.youtube.com/watch?v=wAg-3MsZQu0&feature=fvst>).

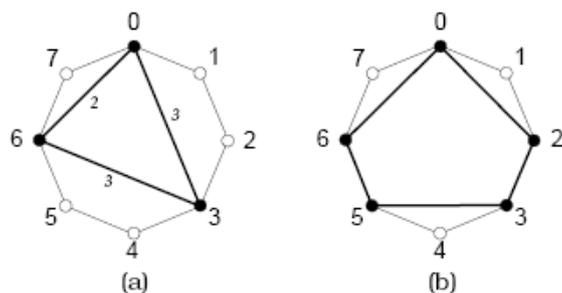


Figure 1: (a) The Euclidean rhythm $E(3, 8)$ is the Cuban tresillo, (b) The Euclidean rhythm $E(5, 8)$ is the Cuban cinquillo.

En los dos ejemplos precedentes $E(5, 13)$ y $E(5, 8)$ el número de unos es menor que el de ceros. Si, por el contrario, el número de ceros es inferior al número de unos, el Algoritmo de Bjorklund produce los siguientes pasos con, por ejemplo $E(8, 5)$:

[11111000]
 [10] [10] [10] [1] [1]
 [101] [101] [10]
 [10110110]

El Ritmo Euclidiano resultante es $E(8, 5) = [x . x x . x x .]$. Este ritmo está representado como un polígono (pentágono) en la figura 1 (b). Es otro ritmo famoso de la escena mundial. En Cuba se le denomina “*cinquillo*” y está íntimamente relacionado con el “*tresillo*” [15]. Ha sido utilizado en jazz a lo largo de todo el siglo XX, al igual que en la música rockabilly de los 50. Por ejemplo en el ritmo de palmas del Hound Dog de Elvis [7]. El “*cinquillo*” es ampliamente utilizado en la música tradicional africana del Oeste. [26]. [31].

En el resto de esta sección, listaremos algunos de los Ritmos Euclidianos más comunes encontrados en la “World Music”. En algunos casos, el Ritmo Euclidiano es una versión rotada de un ritmo de uso común. Si un ritmo es una versión rotada de otro, decimos que pertenecen al mismo collar, siendo ambos instancias de uno solo, está ilustrado en la figura 2.

El ritmo más simple, tiene un valor de $k = 1$. Así la subfamilia de Ritmos Euclidianos derivados:

$E(1,2) = [x .]$
 $E(1,3) = [x . .]$
 $E(1,4) = [x . . .]$, etc.

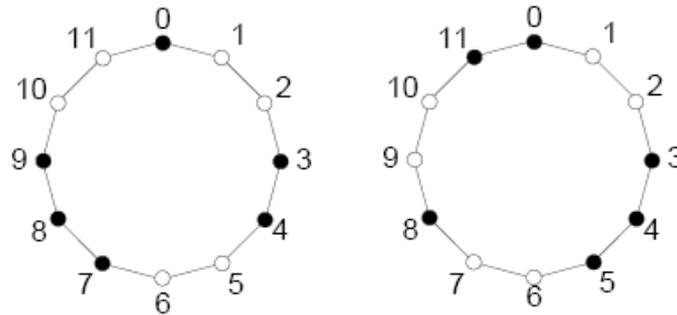


Figure 2: *These two rhythms are instances of one and the same rhythm necklace.*

Dado que estamos interesados en ritmos cíclicos no periódicos, no es necesario enumerar los ritmos con múltiplos de k y n . Por ejemplo $E(4,12) = [x \dots x \dots x \dots x \dots]$ es el múltiplo ($\times 4$) de $E(1,3) = [x \dots]$. Curiosamente, este ritmo es el 12/8 de las palmas del *fandango* en la música del Sur de España, donde “x” es una palmada fuerte y “.” una débil [10]. (Nota del traductor: exactamente, el ritmo de Fandango es así pero con acentuaciones distintas $[x \dots x \dots x \dots x \dots]$. No sería pues un ritmo euclidiano).

$E(2,3) = [x \dots x]$ es un modelo rítmico Afrocaribeño muy común. Por ejemplo, es el ritmo de la conga en 6/8 del *Swing Tumbao* [18]. También es de uso común en la música Latina Americana, como por ejemplo en la *Cueca* [33].

$E(2,5) = [x \dots x \dots]$ es un ritmo persa del siglo XIII denominado *Khafif-e-ramal* [34]. También es el compás del segundo mov. de la *Sinfonía Patética* de Tchaikovsky [17]. Cuando empieza en el segundo acento $[x \dots x \dots]$ es el modelo rítmico del *Take Five* de Dave Brubeck y de *Marte*, Los Planetas, autoría de Gustav Holst [17].

$E(3,4) = [x \dots x \dots x]$ es el modelo arquetipo de la *Cumbia* colombiana [20], así como del *Calypso* de Trinidad [13]. También responde al modelo rítmico de otro ritmo pérsico del siglo XIII, el llamado *Khalif-e-saghil* [34], así como el troqueo coreico de la Antigua Grecia.

$E(3,5) = [x \dots x \dots x]$, cuando empieza en el segundo acento, es otro ritmo del siglo XIII en Persia, esta vez el llamado *Khafif-e-ramal* [34] así como el de una danza rumana [25].

$E(3,7) = [x \dots x \dots x \dots]$ es un ritmo que responde al nombre de *Ruchenitza*, usado en el folk búlgaro [24]. También es el modelo rítmico de *Money*, de Pink Floyd.

$E(3,8) = [x \dots x \dots x \dots]$ es el *tresillo* cubano presentado anteriormente [15]

$E(4,7) = [x \dots x \dots x \dots x]$ es otra *Ruchenitza*, del folklore búlgaro [24]

$E(4,9) = [x \dots x \dots x \dots x \dots]$ es el ritmo *Aksak*, de Turquía [6]. También es el ritmo métrico del *Rondó a la Turca* de Dave Brubeck [17].

5. Cadenas Euclidianas

En el estudio de la combinatoria de palabras y secuencias, hay una familia de cadenas denominadas Cadenas Euclidianas [11]. En esta sección investigaremos las relaciones entre las Cadenas Euclidianas y los Ritmos Euclidianos. Usaremos la misma terminología y notación introducida en [11].

Sea $P = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$, una cadena de enteros positivos. Ahora, rotemos P hacia la derecha una posición, siendo $p(P) = (p_{n-1}, p_0, p_1, p_{n-2})$, y sea $p^d(P)$ la rotación hacia la derecha de P con un número de posiciones d . La figura 3, ilustra el operador $p(P)$ siendo P el modelo rítmico de campana del *Bembé* en África Occidental [32]. La figura 3(a) nos muestra el modelo rítmico de campana en el *Bembé*, la figura 3(b) nos muestra $p(P)$, un modelo rítmico de palmadas del África Occidental [24], y la figura 3(c) representa $p^7(P)$, que es un ritmo *Tambú* de Curaçao [28].

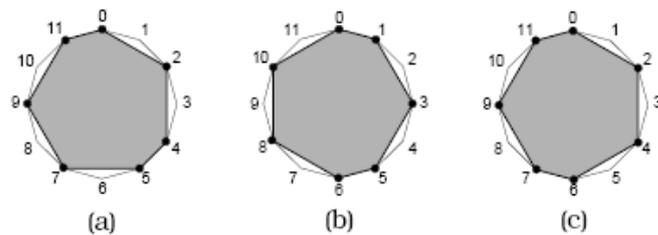


Figure 3: Two right-rotations of the *Bembé* string: (a) the *Bembé*, (b) rotation by one unit, (c) rotation by seven units.

J. Ellis [11] define una cadena $P = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ como una Cadena Euclidiana. Si se aumenta p_0 por uno o se disminuye p_{n-1} por uno, produce una nueva cadena $\tau(P)$, siendo esta una rotación de P . P y $\tau(P)$, son variaciones de un mismo ritmo de collar. Por lo tanto, si representamos los ritmos como secuencias binarias, los ritmos euclidianos no pueden ser cadenas euclidianas porque, en virtud del algoritmo euclidiano empleado, todos los ritmos euclidianos comienzan por “1”. Incrementando p_0 en uno, lo convierte en “2”, que no es una cadena binaria. Por lo tanto, para explorar las relaciones entre Ritmos Euclidianos y Cadenas Euclidianas, representaremos los ritmos numéricamente. Como ejemplo considérese el ritmo turco *Aksak* [6] expresado por $E(4, 9) = [x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cdot \cdot]$. $E(4,9) = (2223)$ y $\tau(2223) = (3222)$, que es una rotación de $E(4,9)$ y por lo tanto, una cadena euclidiana. De hecho, para $P = E(4,9)$, $\tau(P) = p^3(P)$. Como un segundo ejemplo, consideremos el patrón rítmico de palmas del África occidental, mostrado en la figura 3 (b) dado por $P = (1221222)$. Tenemos que $\tau(P) = (2221221) = p^6(P)$, el modelo rítmico mostrado en la figura 3 (c), imagen espejo de la de P en el axis (0,6). Por lo tanto, es

una cadena euclidiana. Sin embargo, nótese que P no es un ritmo euclidiano. Con todo, P es una rotación del ritmo euclidiano $E(7,12) = (2122122)$.

Ellis [11] tiene muchos ejemplos bonitos sobre Cadenas Euclidianas. Nos muestra como las cadenas euclidianas existen sólo si n y $(p_0 + p_1 + p_{n-1})$ son números primos relativos y que, cuando existen, son únicos. También enseña a construir cadenas euclidianas con un algoritmo que tiene la misma estructura que el euclidiano. Además, relaciona Cadenas Euclidianas con otras muchas familias de secuencias que estudian la combinatoria de las palabras [1], [19].

Sea $R(P)$ reverso (imagen espejo o retrogradación en lenguaje musical) de P , por ejemplo $R(P) = (p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1, p_0)$. En el ritmo Askak donde $P = (2223)$ obtenemos $R(P) = (3222)$. $R(P)$ implica ejecutar el ritmo P en retrogradación (empezando por el final). Ahora determinaremos que Ritmos Euclidianos de uso en la World Music enumerados anteriormente, son Cadenas Euclidianas o Cadenas Euclidianas retrogradadas. La longitud de una cadena euclidiana se define por el número de enteros que tiene. Esto se traduce al lenguaje rítmico, en el número de acentos. Además, las cadenas de longitud "1" son Cadenas Euclidianas, naturalmente. Por lo tanto todos los ritmos euclidianos básicos con sólo un acento como por ejemplo $E(1,2) = [x \cdot] = (2)$, $E(1,3) = [x \cdot \cdot] = (3)$ y $E(1,4) = [x \cdot \cdot \cdot] = (4)$, etc, son Cadenas Euclidianas y Cadenas Euclidianas Retrogradadas. En la lista siguiente los Ritmos Euclidianos son mostrados en ambas notaciones. También se hace referencia al estilo de la música. Finalmente si sólo la versión de un Ritmo Euclidiano Retrogradado es incluida, será referida como ritmo de collar.

Los siguientes Ritmos Euclidianos son Cadenas Euclidianas:

- $E(2,5) = [x \cdot x \cdot \cdot] = (2,3)$ (clásica, jazz, Persia, etc)
- $E(3,7) = [x \cdot x \cdot x \cdot \cdot] = (2,2,3)$ (folklore búlgaro)
- $E(4,9) = [x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cdot] = (2,2,2,3)$ (Turquía)
- $E(5,11) = [x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cdot] = (2,2,2,2,3)$ (clásica)
- $E(5,16) = [x \cdot \cdot x \cdot \cdot x \cdot \cdot x \cdot \cdot \cdot] = (3,3,3,3,4)$ (ritmo de collar brasileño)

Los siguientes Ritmos Euclidianos, son Cadenas Euclidianas Retrogradadas:

- $E(2,3) = [x \cdot x] = (21)$ (África occidental, América Latina)
- $E(3,4) = [x \cdot x x] = (211)$ (Trinidad, Persia)
- $E(3,5) = [x \cdot x \cdot x] = (221)$ (Rumanía, Ritmos de Collar en Persia)
- $E(3,8) = [x \cdot \cdot x \cdot \cdot x \cdot] = (332)$ (África occidental)
- $E(4,7) = [x \cdot x \cdot x \cdot x] = (2221)$ (Bulgaria)

- $E(4,11) = [x \dots x \dots x \dots x \dots] = (3332)$ (Frank Zappa)
- $E(5,6) = [x \dots x \dots x \dots] = (21111)$ (Arabia)
- $E(5,7) = [x \dots x \dots x \dots] = (21211)$ (Arabia)
- $E(5,9) = [x \dots x \dots x \dots x \dots] = (22221)$ (Arabia y ritmos de collar en Sudáfrica y Rumanía)
- $E(5,12) = [x \dots x \dots x \dots x \dots] = (32322)$ (Sudáfrica)
- $E(7,8) = [x \dots x \dots x \dots x \dots] = (2111111)$ (ritmo Tuareg en Libia)
- $E(7,16) = [x \dots x \dots x \dots x \dots x \dots] = (3223222)$ (Brasil, ritmo de collar)
- $E(11, 24) = [x \dots x \dots] = (32222322222)$ (África Central)

Los siguientes Ritmos Euclidianos no son ni Ritmos Euclidianos Retrogradados ni Cadenas Euclidianas:

- $E(5,8) = [x \dots x \dots x \dots] = (21212)$ (África occidental)
- $E(7,12) = [x \dots x \dots x \dots x \dots x \dots] = (2122122)$ (África occidental)
- $E(9,16) = [x \dots x \dots x \dots x \dots x \dots x \dots] = (212221222)$ (África occidental y central. Ritmo de collar en Brasil)
- $E(13,24) = [x \dots x \dots] = (2122222122222)$ (Ritmo de collar del África central)

6. Conclusiones

Una nueva familia de Ritmos musicales ha sido descrita, llamada Ritmos Euclidianos, obtenidos aplicando la secuencia generadora de algoritmos de Bjorklund, cuya estructura es igual al algoritmo euclidiano. También se ha mostrado como muchos de los ritmos tradicionales de la música étnica, y no sólo ésta, son Ritmos Euclidianos. Algunos de estos son además Cadenas Euclidianas.

Los tres grupos de Ritmos Euclidianos listados anteriormente, nos revelan comportamientos asombrosos. Aquellos Ritmos Euclidianos que a su vez son Cadenas Euclidianas (los primeros cuatro del grupo primero) son más asiduos en música clásica, jazz, y los folklores De Bulgaria, Turquía y Persia, pero no son populares en música africana. Los Ritmos Euclidianos que no son ni Cadenas Euclidianas ni Cadenas Euclidianas retrogradables (los dos primeros del grupo tercero), son utilizados principalmente en la música Subsahariana. Finalmente, los Ritmos Euclidianos que son

Cadenas Euclidianas retrogradables (el grupo segundo) parecen tener un uso más amplio. Encontrar explicaciones musicológicas para las preferencias aparentes de estas propiedades matemáticas, genera una cuestión etnomusicológica interesante.

Las Cadenas Euclidianas definidas en [11] determinan otra familia de ritmos, muchos de los cuales son utilizados en la música étnica pero no son necesariamente Ritmos Euclidianos, como por ejemplo el (1221222), un patrón de campana africano. Por lo tanto, sería interesante explorar las relaciones empíricas entre las Cadenas Euclidianas y los ritmos de la “World Music”, además de determinar formalmente las relaciones matemáticas exactas entre los Ritmos Euclidianos y las Cadenas Euclidianas.

Referencias

- [1] J.-P. Allouche and J. O. Shallit. *Automatic Sequences*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2002.
- [2] Simha Arom. *African Polyphony and Polyrhythm*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1991.
- [3] Gerard Behague. Bossa and bossas: recent changes in Brazilian urban popular music. *Ethnomusicology*, 17(2):209–233, 1973.
- [4] E. Bjorklund. A metric for measuring the evenness of timing system rep-rate patterns. SNS ASD Technical Note SNS-NOTE-CNTRL-100, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, U.S.A., 2003.
- [5] E. Bjorklund. The theory of rep-rate pattern generation in the SNS timing system. SNS ASD Technical Note SNS-NOTE-CNTRL-99, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, U.S.A., 2003.
- [6] C. Brauloiu. Le rythme aksak. *Revue de Musicologie*, 23:71–108, 1952.
- [7] Roy Brewer. The use of Habanera rhythm in rockabilly music. *American Music*, 17:300–317, Autumn 1999.
- [8] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2001.
- [9] H. S. M. Coxeter. Music and mathematics. *The Canadian Music Journal*, VI:13–24, 1962.
- [10] Miguel Díaz-Bañez, Giovanna Farigu, Francisco Gómez, David Rappaport, and Godfried T. Toussaint. El compás flamenco: a phylogenetic analysis. In *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, Southwestern College, Winfield, Kansas, July 30 - August 1 2004.
- [11] John Ellis, Frank Ruskey, Joe Sawada, and Jamie Simpson. Euclidean strings. *Theoretical Computer Science*, 301:321–340, 2003.
- [12] Euclid. *Elements*. Dover, 1956. Translated by Sir Thomas L. Heath.
- [13] Bob Evans. *Authentic Conga Rhythms*. Belwin Mills Publishing Corporation, Miami, 1966.

- [14] Philip Franklin. The Euclidean algorithm. *The American Mathematical Monthly*, 63(9):663–664, November 1956.
- [15] S. A. Floyd Jr. Black music in the circum-Caribbean. *American Music*, 17(1):1–38, 1999.
- [16] R. Kauffman. African rhythm: A reassessment. *Ethnomusicology*, 24(3):393–415, Sept. 1980.
- [17] Michael Keith. *From Polychords to Pólya: Adventures in Musical Combinatorics*. Vinculum Press, Princeton, 1991.
- [18] Töm Klöwer. *The Joy of Drumming: Drums and Percussion Instruments from Around the World*. Binkey Kok Publications, Diever, Holland, 1997.
- [19] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2002.
- [20] Peter Manuel. The anticipated bass in Cuban popular music. *Latin American Music Review*, 6(2):249–261, Autumn-Winter 1985.
- [21] Thomas J. Mathiesen. Rhythm and meter in ancient Greek music. *Music Theory Spectrum*, 7:159–180, Spring 1985.
- [22] Craig Morrison. *Go Cat Go: Rockabilly Music and Its Makers*. University of Illinois Press, Urbana, 1996.
- [23] C. Stanley Ogilvy and John T. Anderson. *Excursions in Number Theory*. Oxford University Press, New York, 1966.
- [24] Jeff Pressing. Cognitive isomorphisms between pitch and rhythm in world musics: West Africa, the Balkans and Western tonality. *Studies in Music*, 17:38–61, 1983.
- [25] Vera Proca-Ciortea. On rhythm in Rumanian folk dance. *Yearbook of the International Folk Music Council*, 1:176–199, 1969.
- [26] Jay Rahn. Asymmetrical ostinatos in sub-saharan music: time, pitch, and cycles reconsidered. *In Theory Only*, 9(7):23–37, 1987.
- [27] Jay Rahn. Turning the analysis around: African-derived rhythms and Europe-derived music theory. *Black Music Research Journal*, 16(1):71–89, 1996.
- [28] Rene V. Rosalia. *Migrated Rhythm: The Tambú of Curaçao*. CaribSeek, 2002.
- [29] Doug Sole. *The Soul of Hand Drumming*. Mel Bay Productions Inc., Toronto, 1996.
- [30] James A. Standifer. The Tuareg: their music and dances. *The Black Perspective in Music*, 16(1):45–62, Spring 1988.
- [31] Godfried T. Toussaint. A mathematical analysis of African, Brazilian, and Cuban *clave* rhythms. In *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, pages 157–168, Towson University, Towson, MD, July 27-29 2002.
- [32] Godfried T. Toussaint. Classification and phylogenetic analysis of African ternary rhythm timelines. In *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, pages 25–36, Granada, Spain, July 23-27 2003.
- [33] Pedro van der Lee. Zarabanda: esquemas rítmicos de acompañamiento en 6/8. *Latin American Music Review*, 16(2):199–220, Autumn-Winter 1995.
- [34] O. Wright. *The Modal System of Arab and Persian Music AD 1250-1300*. Oxford University Press, Oxford, England, 1978.