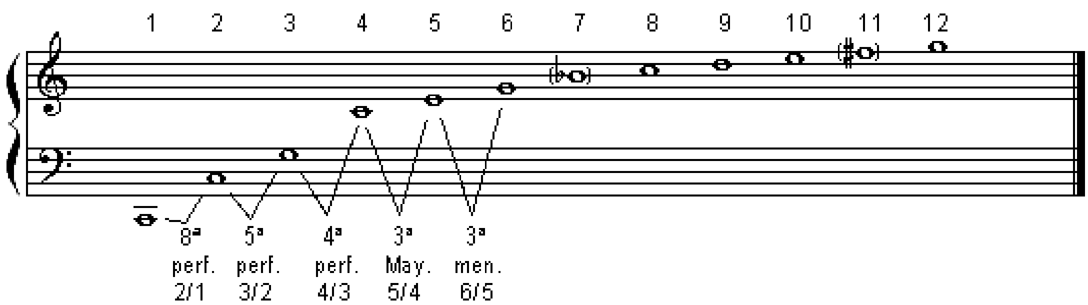
Título original: Tutorial for Frequency Modulation Synthesis
http://www.sfu.ca/~truax/fmtut.html
Autor: Barry Truax
Traducción: abird, abird_music@ono.com

SÍNTESIS FM: PROPIEDADES DE LAS RATIOS ENTRE PORTADORA Y MODULADORA

Cuando la frecuencia de la moduladora (modulator, M) está en el rango de sub-audio (de 1 a 20 Hz), podemos escuchar sonidos como de sirena según modula a la portadora (Carrier, C). Sin embargo, cuando subimos M al rango de audio más audible (de 30 Hz en adelante) empezamos a escuchar nuevos timbres según cambian los armónicos. Para determinar qué armónicos están presentes, debemos controlar la ratio entre la frecuencia de la portadora (C) y la moduladora (M). En vez de tratar con estas frecuencias en Hz, nos referiremos a dicha relación como la **C:M Ratio,** siendo C y M números enteros.

A continuación, presento una ***tabla de los 12 primeros armónicos en notación musical***



Propiedades de las C:M Ratios

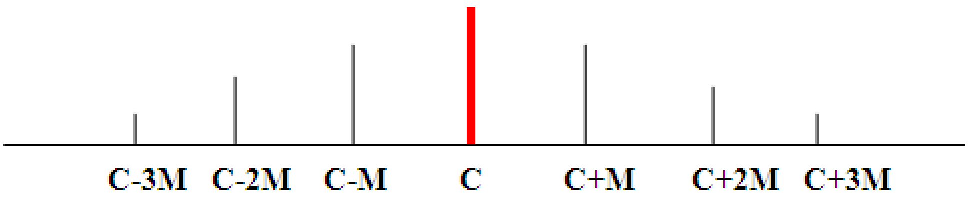
Algunas condiciones preliminares son:

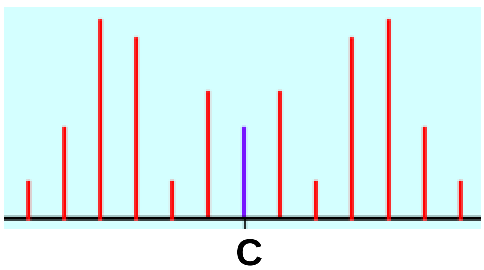
1. Trataremos solamente con ***Ratios no reductibles***. Éstas son aquellas con números enteros sólo divisibles entre 1. Así, por ejemplo, la ratio 2:2 es divisible por 2, siendo la misma que 1:1. Lo mismo ocurriría con 9:6, que es divisible por 3, quedando en 3:2.

2. Dividiremos las ratios en grupos para manejarlas mejor. Un grupo, por ejemplo sería el de las ***ratios 1:N***, es decir ratios 1:1, 1:2, 1:3, etc. Encontraremos que tienen propiedades particulares.
3. Otro grupo sería el llamado de las ratios ***N:M, donde N y M son menores de 10.*** En este caso la restricción a utilizar sólo números enteros es sólo para facilitar los cálculos aritméticos.
4. El último grupo es el denominado ***Ratios de números por encima de 10.*** De nuevo, la división es arbitaria. De todos modos, no trataremos con ratios 100:1 o 100:99. Aunque son ratios legítimas se escapan un poco de nuestro objetivo, aunque la persona interesada pueda abordar su estudio y propiedades a través de la síntesis POD (Barry Truax).

Calculando los armónicos

En la síntesis FM un conjunto de armónicos aparece alrededor de C (frecuencia fundamental), espaciados simétricamente según sea la frecuencia de M. Así, nos referimos a los armónicos en pares: superiores e inferiores, o si se quiere, positivos y negativos.





En este par de ejemplos, dispares entre sí (observemos sobre todo la relación de C con los armónicos: en el ejemplo primero prevalece la fundamental, mientras en el segundo los armónicos, sobre todo tercero y cuarto) podemos observar gráficamente lo dicho.

Calculando Armónicos

Los llamados armónicos superiores son los que quedan “por encima” de C. Sus frecuencias son:

C+M, C+2M, C+3M, C+4M…

Por ejemplo, siendo la Ratio C:M = 1:2 (la moduladora dos veces la frecuencia de la portadora), la serie quedaría así:

Armónico 1º: C+M = 1+2 = 3
Armónico 2º: C+2M = 1 +2*2 = 5
Armónico 3º: C+ 3M = 1 + 2*3 = 7
Armónico 4º: C+ 4 M = 1 + 2*4 = 9

Es evidente que la serie **3, 5, 7, 9…** son todos números impares, y siendo C = 1 (la frecuencia más baja del espectro), nos encontramos pues con toda una serie de armónicos impares. Digamos de paso que es el espectro armónico de una onda cuadrada, sonido hueco y profundo, tipo clarinete.

Por otro lado, si C:M fuera 2:5. El primer armónico C+M, sería 2+5 = 7. Como 7 no es múltiplo de 2, sería inarmónico. Mientras, el segundo armónico C+2M, sería 2+ 2*5 = 12, es decir el sexto armónico.

Calculando armónicos: los armónicos inferiores (por debajo de la fundamental)

Los armónicos inferiores son símetricos a los superiores, es decir que responderían a la serie:

C-M, C-2M, C-3M, C-4M…

Cuando el armónico es de valor negativo, se dice entonces que es “reflejado”, cambiando su signo negativo en positivo. Acústicamente, sin embargo, esta reflexión desencadena una inversión de fase de 180º. Matemáticamente, expresamos esta reflexión usando valores absolutos sobre la expresión **/C-M/,** para indicar que quitamos el signo menos (-) y tratamos el número como positivo.

Por ejemplo para C:M ratio 1:2, el primer armónico inferior sería:

/C-M/ = /1-2/ = /-1/ = 1

El segundo armónico sería /C-2M/ = /1-2*2/ = /1-4/ = /-3/ = 3

Para la ratio 1:1 el primer armónico inferior es 0 (inaudible) y el 2º, 3º y 4º, 1, 2, 3 respectivamente.

Para 7:5, el primer armónico inferior sería 2, y la serie completa 2, 3, 8, 13, siendo 3 3l primero reflejado.

Un asunto importante a resolver en una relación C:M, es si la frecuencia de C es la más baja del espectro, es decir si es la fundamental. Si es así, trataremos C como la frecuencia fundamental que escuchemos en el timbre resultante.

En el caso de **C:M = 1:1,** sus armónicos superiores serán 2, 3, 4, … y los inferiores 0, 1, 2, 3, …Claramente C es el número más bajo si desconsideramos el 0 (inaudible) y todos los armónicos son "armónicos" (múltiplos). Como 1:1 es la única ratio con un armónico inferior de valor 0, es un caso especial. Es, por otro lado, la única ratio que produce la serie entera de armónicos naturales. Para otras ratios distintas de 1:1, podríamos descifrar sus armónicos para ver si hay alguno inferior a C. Está bien pero es una labor tediosa y nos gustaría encontrar una mejor manera de proceder: buscar una regla. Para empezar, observemos que en el caso de ratio 1:2, el primer armónico negativo es /-1/ = 1, situándose junto a C. Además, si M es mayor que dos veces C, por ejemplo en la ratio 2:5, el primer armónico reflejado será siempre mayor que C. De aquí que podamos deducir ya nuestra ***primera regla de oro:***

Para que C sea fundamental, M tiene que ser al menos igual o mayor que dos veces C o bien adecuarnos a la ratio 1:1

Otra propiedad útil para familiarizarse con ella es aquella en la que los armónicos inferiores y superiores coinciden. Se dice entonces de ellos que "caen juntos". Acústicamente, esto significa que las amplitudes de ambos armónicos se sumarán, influenciados además por la inversión de fase del armónico reflejado. Como la amplitud de cada armónico varía según la intensidad de modulación, expresada en el índice de modulación, la suma de las contribuciones de cada armónico resultan realmente complejas.

Posiblemente hayas notado que los armónicos de la ratio 1:1 tienen esa propiedad de ir disminuyendo paulatinamente de intensidad. Podrás encontrar una propiedad parecida en todos los armónicos de serie N:1 (2:1. 3:1, 4:1, etc).

El segundo tipo de ratio que muestra la misma propiedad es 1:2. Los armónicos impares se encuentran en las series arriba (positivo) y abajo (negativo). Podríamos extrapolar dicha propiedad a todas las series con los C impares y M = 2, es decir 1:2, 3:2, 5:2, 7:2…y así sucesivamente.

Ninguna otra ratio excepto las aquí expuestas N:1 e imparesN:2 tiene esta propiedad digamos "natural" (en tanto imita la naturaleza: armónicos alejados de la fundamental suenan menos). Todas las demás series tienen espaciados los armónicos de modo asimétrico: la distancia en frecuencia entre armónicos seguidos es diferente, aunque algunas series siguen un patrón. Por ejemplo la serie 2:5 tiene como armónicos:

7, 12, 17
/-3/, /-8/, /-13/, /-18/ que juntas harían, además de C, lo siguiente: 2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18, siguiendo un patrón definido.

Ahora queremos saber la distancia entre el primer armónico positivo C+M y el primero negativo C-M que es negativo por definición y que podría considerarse positivo para seguir la expresión (M-C). Resta estas dos frecuencias (C+M) – (M-C) y observarás que el resultado siempre se podría expresar con la expresión 2C. Así, podríamos deducir la siguiente regla:

<u>Cuando C es la frecuencia fundamental del espectro, la distancia entre los armónicos (excepto para la ratio 1:1) será: M-2C y 2C.</u>

Por ejemplo en la ratio 2:5, cuya serie sería 2, 3, 7, 8, 12, 13…la distancia entre armónicos sería M – 2C = 5-4 = 1 y 2C = 4. Efectivamente, armónicos situados a distancia de 1 (entre 2 y 3, 7 y 8, etc) y 4 (entre 3 y 7, 8 y 12, etc). Observa que tenemos que empezar con C como fundamental. Esto será referido en la siguiente sección como la "Forma normal de la ratio".

Forma normal de la C:M Ratio

Definición: Una ratio C:M está en forma normal (N.F.) cuando la portadora C es la fundamental en el espectro que produce.

Regla: Para que una Ratio esté en N.F., M debe ser igual o mayor que 2C o bien ser la Ratio 1:1.

Lo que estamos tratando con el concepto de N.F., es elaborar la base de una clasificación esquemática de todas las ratios y al mismo tiempo, codificar nuestra regla de oro acerca de las condiciones de C para ser la fundamental. Si consideramos ratios que tengan números enteros hasta valor 9, podemos listar todas ellas en N.F.:
1:1, 1:2, 1:3,1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9, 2:5, 2:7, 2:9, 3; 7, 3:8, 4:9

También podrían ser listadas en el orden llamado de "Farey Series", donde el valor M/C crece, o bien el valor C/M disminuye.

1:1, 1:2, 4:9, 3:7, 2:5, 3:8, 1:3, 2:7, 1:4, 2:9, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9

Cada ratio en su Forma Normal, tendrá asociada una familia de ratios. Veamos:

Reducir una ratio que no está en su Forma Normal a su Forma Normal

Cuando el valor de la Moduladora (M), en una ratio es menor a 2C no está en su Forma Normal, pero puede ser reducida a su N.F. aplicando la operación siguiente:

C = /C-M/

Lo que esa operación indica es que substraes M de C (ignorando signos negativos) y tratas el resultado como el nuevo valor de C. Continúas haciendo esto hasta que el valor de C satisfaga el criterio, por definición, de Forma Normal.

Consideremos la serie 3:1. Primero reducimos 3-1 = 2, obteniendo la ratio 2:1, que todavía no satisface el criterio de N.F. Seguimos aplicando: 2-1 = 1, obteniendo la serie 1:1 que satisface el criterio de N.F.

Veamos ahora un nuevo ejemplo con la serie 8:5: Primero reducimos 8-5 = 3, obteniendo la serie 3:5, seguimos y 3-5 = 2, obteniendo la serie 2:5. Esta si sigue el criterio de Forma Normal. Observa que la operación de reducción es la contraria a la de generación de armónicos.

Para generar armónicos sumamos M a C, para reducir armónicos, substraemos M de C.

Familias de C:M Ratios

Para cada Ratio en su Forma Normal, existe una serie de ratios que producen una misma serie de armónicos. Llamamos a esta serie de ratios una “familia” e identificamos a dicha familia por su Forma Normal de ratio.

Considerando las ratios 2:5, 3:5 y 7:5, aquí están sus armónicos:

Serie 2:5:
2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18, 22, 23, 27, 28

Serie 3:5:
3, 2, 8, 7, 13, 12, 18, 17, 23, 22, 28, 27

Serie 7:5
7, 2, 12, 3, 17, 8, 22, 13, 27, 18, 32, 23

Podemos observar que las tres series producen los mismos armónicos sólo que en diferente orden así que podemos hablar de la familia 2:5, que es la ratio en N.F. ¿Cómo podemos generar la familia entera de miembros? Ésta es la regla:

C+N*M:M y **/C-N*M/:M**

Aplicándolo a la ratio 2:5 en estado N.F. sería así:

2+1*5:5 = 7:5
/2-1*5/:5 = 3:5
2+2*5:5 = 12:5
/2-2*5/:5 = 8:5
2+3*5:5 = 17:5

/2-3*5/:5 = 13:5
2+4*5:5 = 22:5
/2-4*5/:5 = 18:5
2+5*5:5 = 27:5
/2-5*5/:5 = 23:5

Ordenándolos quedarían, incluida la N.F: 2:5, 3:5, 7:5, 8:5, 12:5, 13:5, 17:5, 18:5, 22:5, 23:5…

C:M Ratios Armónicas y Disonantes

Cuando vimos cómo generar armónicos observamos que algunos eran armónicos o consonantes y otros disonantes (aquellos no múltiplos de la fundamental). Acústicamente, esta es una muy importante distinción pues cada ratio nos proporciona elementos tanto consonantes como disonantes, de los cuales podemos hacer uso composicional.

La regla para determinar si los armónicos son consonantes/disonantes en N.F. es sencilla:

En “Normal Form (N.F.)” los armónicos de las Ratios en forma 1:N son siempre consonantes, mientras los demás son disonantes.

Consonantes: 1:1, 1:2, 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9

Disonantes: 2:5, 2:7, 2:9, 3:7, 3:8, 4:9

Cuando una Ratio no está en N.F. y queremos saber si es consonante o no, siempre se puede reducir a N.F. y aplicar. No obstante, las ratios con M = 1, 2, 3, 4, 6 son siempre consonantes. Para M = 5, 7, 8, 9 observa si C+1 o bien C-1, son múltiplos de M. Si es así, es consonante. Por ejemplo, 9:5, 11:5, 14:5, 16:5 son miembros de la familia 1:5 donde los valores de C+1 o C-1 serían respectivamente múltiplos:

9+1 = múltiplo de 5
11-1 = múltiplo de 5
14+1 = múltiplo de 5
16-1 = múltiplo de 5

Calculando la Frecuencia Fundamental

Por otro lado, los integrantes 7:5, 8:5, 12:5, 13:5…de la familia de 2:5 son disonantes. Una vez que estamos pensando en una línea familiar de ratios que producen un mismo set de armónicos aunque en distintos órdenes, podríamos querer saber cómo calcular la correcta frecuencia C en un miembro de la familia de tal modo que produzca el mismo espectro que la N.F. ratio en una frecuencia C dada (por ejemplo, de 100 Hz, para hacer los cálculos sencillos).

FC = (C Ratio) * (N.F. Carrier freq.) / (N.F. C ratio)

Por ejemplo, si la N.F. Frecuencia C es 100 Hz para 1:1, la correspondiente C para 3:1 sería 3*100/1 = 300Hz. , para 1:2 sería 1*100/2 = 50 Hz, para 7:5 (recordar que es de la familia de 2:5 en N.F.) 7*100/2 = 350 Hz. Acústicamente escucharemos a los miembros de una familia no N.F. con una frecuencia C alta, como teniendo su energía repartida entre armónicos altos, más que centrados en la fundamental, sobre todo con un índice de modulación bajo.

Para calcular la fundamental en una ratio C:M que no es N.F., debemos reducir primero a N.F. y aplicar la fórmula:

Fundamental (FF) = (Frecuencia de C) * (N.F.C ratio) / (C ratio)

Por ejemplo, con una ratio 5:2 y una frecuencia de C = 500 Hz, la N.F, ratio sería 1:2 y la fundamental FF sería 500*1/5 = 100 Hz. Igualmente para una ratio de 7/5 y una frecuencia C de 700 Hz, FF = 700*2/7 = 200 Hz.

Si sabemos la fundamental y queremos saber la frecuencia de C, aplicaremos la fórmula:

Frecuencia de C = FF * C ratio / N.F.C ratio

Referencias

B. Truax, "Organizational Techniques for C:M Ratios in Frequency Modulation", *Computer Music Journal,* 1(4), 1978, pp. 39-45;

reprinted in *Foundations of Computer Music,* C. Roads and J. Strawn (eds.). MIT Press, 1985.

J. Chowning, "The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation," *Journal of the Audio Engineering Society* 21(7), 1973; reprinted in *Computer Music Journal* 1(2), 1977.

B. Schottstaedt, "The Simulation of Natural Instrument Tones Using Frequency Modulation with a Complex Modulating Wave," *Computer Music Journal* 1(4), 1977; reprinted in *Foundations of Computer Music,* C. Roads and J. Strawn (eds.). MIT Press, 1985.

J. Bate, "The Effects of Modulator Phase on Timbres in FM Synthesis," *Computer Music Journal* 14(3), 1990.

F. Holm, "Understanding FM Implementations: A Call for Common Standards," *Computer Music Journal* 16(1), 1992.